مجلس الخدمة المدنية

اللجنة الفاحصـــــة

دائـــرة المباريـــــات

مباراة مفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية
التربية في الجامعة اللبنانية للتعيين بوظيفة استاذ تعليم
ثانوي/ اختصاصي الرياضيات والفيزياء في ملاك
وزارة التربية والتعليم العالي

الاختصاص : الرياضيات باللغتين الفرنسية والانكليزية

مسابقة في الثقافة العامة باللُّغة العربيَّة .   الوقت : ساعتان

من السمات التي ينبغي للمثقَّف المعاصر التحلِّي بها ، اعتماد الحوار سبيلاً لحلِّ النزاعات وتوظيـف العلم في خدمة الإنسان .

حلّل معلّلاً إجابتك ، مقترحاً سمةً ثالثة تجدها متكاملة مع السمتين السابقتين ، مبرّراً اختيارك .

بيروت، في ٢٠٠٨/٣/٨

اللجنة الفاحصة

مجلس الخدمة المدنية
اللجنة الفاحصة

المباراة المفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية التربية في الجامعة اللبنانية
للتعيين بوظيفة استاذ تعليم ثانوي

الاختصاص: الرياضيات باللغة الانكليزية   الوقت : اربع ساعات
مسابقة في الاختصاص المطلوب.

Exercise I-

1- Let A, B and C be three sets. Show that :
   If [$A\cup B = A\cup C$ and $A\cap B = A\cap C$], then $B = C$.
2- Show that there exists a unique set X satisfying :
   [$A\cup X = A\cup B$ and $A\cap X = \varnothing$]

Exercise II-

Let α be a nonzero complex number. Determine the complex number z such that the points A, B and C of respective affixes $\alpha z^2, \alpha^2 z$ and z^3 are the vertices of an equilateral triangle.

Exercise III-

1- Find the n^{th} roots of unity.
2- Deduce the solutions of the equation $(z+i)^n = (z-i)^n$ in the complex plane.

Exercise -IV-

Given in an orthonormal system the ellipse (E) of equation:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Designate by $F(c,0)$ and $F'(-c,0)$ the foci of (E). Let S be the point of intersection of the interior bisectors of triangle MFF', where $M(x,y)$ is a variable point of (E).

Let $I(x_I, y_I)$ be the point of intersection of (MS) with (FF').

1- Show that $\frac{\overline{SM}}{\overline{SI}} = -\frac{a}{c}$.

2- Show that $x_I = \frac{c^2}{a^2}x$ and deduce the locus of S as M describes (E).

Exercise V-

Let $\overline{x}$ and σ be the mean and the standard deviation of the statistical series: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Let $I = [\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma]$ and let k be the number of the x_i's not belonging to I.

1- Show that $x_i \notin I$ is equivalent to $|x_i - \overline{x}| \geq 3\sigma$.

2- Show that $n \geq 9k$.

3- Deduce the percentage of the x_i's that belong to I is greater than 80%.

Exercise VI-

An urn contains 9 balls : 3 red and 6 white. Balls are drawn successively, one after the other, with replacement, from this urn.

1- What is the probability that:

a- The first red ball is obtained on the fifth draw?

b- The first red ball is obtained before the fifth draw?

2- Designate by X the random variable that denotes the number of trials needed to obtain the first red ball. Calculate:

a- $P(X = k)$ and $P(X > k)$, where k is a nonzero natural number.

b- $P(X > a+b \mid X>a)$, where a and b are two positive integers.

3- Show that $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

4- Calculate the probability that the third red ball is obtained on the fifth draw?

Exercise VII-

What condition shoud the real number c satisfy so that the function:

$f : R \mapsto R$ defined by:

$$f(x) = x^3 + 2e^x + c$$

has a root in the interval $[0,1]$?

Exercise VIII-

Consider the function

$$f_n(x) = x^n - nx + 1 \text{ where } n \text{ is a natural number } \geq 3.$$

1- Show that the equation $f_n(x) = 0$ has a unique solution $\alpha_n \in [0,1]$ *(It is not rquired to calculate* α_n*).*

2- Compare α_n, $\frac{1}{n}$ and $\frac{2}{n}$.

3- Find the limit of α_n and that of $n\alpha_n$ when $n \to +\infty$.

Exercise IX-

Consider the function f defined by $f(x) = \frac{x\ln x}{x^2 - 1}$, $x \in]0,1[$.

1- Show that the function f can be extended by continuity at 0 and at 1.

2- Show that $1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{x}$, for all $x \in]0;1[$. *(Hint: May use the mean value theorem on the function* ln *on the interval* $[x;1]$*).*

3- Deduce the bounds for $R_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^2 - 1} dx$.

Find $\lim_{n\to\infty} R_n$.

4- Calculate $\int_\alpha^1 x^n \ln x dx$, where $0 < \alpha < 1$.

Deduce the value of $I_n = \int_0^1 x^n \ln x dx$, for $n \geq 1$.

5- Express $\int_0^1 f(x)dx$, using $I_1, I_3, ..., I_{2n+1}$ and R_{2n+1}, for $n \geq 2$.

Deduce the nature of the sequence $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$.

اللجنة الفاحصة

بيروت في : ٨/٣/٢٠٠٨

مجلس الخدمة المدنية
اللجنة الفاحصة

المباراة المفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية التربية في الجامعة اللبنانية
للتعيين بوظيفة استاذ تعليم ثانوي

الاختصاص: الرياضيات باللغة الفرنسية.   الوقت : اربع ساعات

مسابقة في الاختصاص المطلوب.

Exercice I-

1- Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que
$$\text{si } [A\cup B = A\cup C \text{ et } A\cap B = A\cap C] \text{ alors } B = C.$$
2- Montrer qu'il existe un ensemble X unique satisfaisant à :
$$A\cup X = A\cup B \text{ et } A\cap X = \phi.$$

Exercice II-

Soit α un nombre complexe non nul.
Trouver le nombre complexe z pour que les points A, B et C d'affixes respectifs $\alpha z^2, \alpha^2 z$ et z^3 soient les sommets d'un triangle équilatéral.

Exercise III-

1- Trouver les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

2- En déduire les solutions de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ dans le plan complexe.

Exercice IV-

On donne dans un repère orthonormé l'ellipse (E) d'équation
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
On désigne par $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ les foyers de (E). Soit S le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle MFF' où M(x,y) est un point variable de (E).
Soit $I(x_I, y_I)$ le point d'intersection de (MS) avec (FF').

1- Montrer que $\dfrac{\overline{SM}}{\overline{SI}} = -\dfrac{a}{c}$.

2- Montrer que $x_I = \dfrac{c^2}{a^2}x$ et en déduire le lieu de S lorsque M décrit (E).

Exercice V-

Soit $\overline{x}$ et σ la moyenne et l'écart type de la série statistique $x_1, x_2, ..., x_n$.
Soit $I = [\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma]$ et soit k le nombre des x_i n'appartenant pas à I.

1- Montrer que $x_i \notin I$ équivaut à $|x_i - \overline{x}| \geq 3\sigma$.

2- Montrer que $n \geq 9k$.

3- En déduire que le pourcentage des x_i qui appartiennent à I est supérieur à 80%.

Exercice VI-

Une urne contient 9 boules: 3 rouges et 6 blanches. On tire successivement des boules, l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

1- Quelle est la probabilité pour que :
   a- la première boule rouge soit obtenue au cinquième tirage ?
   b- la première boule rouge soit obtenue avant le cinquième tirage ?
2- On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule rouge. Calculer :
   a- $P(X=k)$ et $P(X>k)$ où k est un entier naturel non nul.
   b- $P(X>a+b\,/X>a)$, où a et b sont deux entiers positifs.
3- Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$.
4- Calculer la probabilité pour que la troisième boule rouge soit obtenue au cinquième tirage?

Exercice VII-

Quelle condition doit vérifier le nombre réel c pour que la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=x^3+2e^x+c$$

admette une racine dans l'intervalle $[0,1]$?

Exercice VIII-

On considère la fonction

$$f_n(x)=x^n-nx+1 \quad \text{où } n \text{ est un entier naturel} \geq 3.$$

1- Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède une solution unique $\alpha_n \in [0,1]$ (*il n'est pas demandé de calculer* α_n).
2- Comparer α_n, $\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{n}$.
3- Trouver la limite de α_n et celle de $n\alpha_n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice IX-

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$, $x\in]0,1[$.

1- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

2- Montrer que $1\le\dfrac{\ln x}{x-1}\le\dfrac{1}{x}$, pour tout $x\in]0,1[$. *(**Indication** : On pourrait appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction* ln *sur l'intervalle* [x,1]).

3- En déduire un encadrement de $R_n=\int_0^1\dfrac{x^n\ln x}{x^2-1}dx$.

Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$.

4- Calculer $\int_\alpha^1 x^n\ln x dx$, où $0<\alpha<1$.

En déduire la valeur de $I_n=\int_0^1 x^n\ln x dx$, pour $n\ge1$.

5- Exprimer $\int_0^1 f(x)dx$ à l'aide de $I_1, I_3, \ldots, I_{2n+1}$ et R_{2n+1}, pour $n\ge 2$.

En déduire la nature de la suite $U_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.

اللجنة الفاحصة

بيروت في : ٢٠٠٨/٣/٨