الجمهورية اللبنانية

مجلس الخدمة المدنية

اللجنة الفاحصة

مباراة مفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية التربية في الجامعة اللبنانية للتعيين بوظيفة استاذ تعليم ثانوي/ اختصاص(الرياضيات- الفيزياء- العلوم الاقتصادية) في ملاك وزارة التربية والتعليم العالي.

اختصاص الرياضيات (فرنسي- انكليزي)

مسابقة في الثقافة العامة بإحدى اللغات العربية أو الفرنسية أو الانكليزية. الوقت: ساعتان

عالج الموضوع الآتي بإحدى اللغات الثلاث: العربية أو الفرنسية أو الانكليزية.

للمجتمع المدني في عصرنا دور حيويّ في بناء الأوطان.
ما هي أبرز مكوّنات هذا المجتمع ؟ وما دور هذه المكوّنات في تحقيق التنمية المستدامة ؟

بيروت، في ٢٠١٥/٨/١

اللجنة الفاحصة

الجمهورية اللبنانية

مجلس الخدمة المدنية

اللجنة الفاحصة

مباراة مفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية التربية في الجامعة اللبنانية للتعيين بوظيفة استاذ تعليم ثانوي/ اختصاص(الرياضيات- الفيزياء- العلوم الاقتصادية) في ملاك وزارة التربية والتعليم العالي.

اختصاص الرياضيات / فرنسي

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \, e^{(1-x)} \, dx.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.
   (b) Montrer que, la suite $(I_n)_n$ est strictement décroissante et converge vers 0.
   (c) En utilisant une intégration par parties, montrer que
   $$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n!e - I_n$.
   (a) Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n.
   (b) Calculer u_1.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier naturel.
3. (a) Montrer, en utilisant ce qui précède, que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, le réel $(n!e)$ n'est pas un entier naturel.
   (b) Déduire que le réel e n'est pas un nombre rationnel. (Indication : on pourra remarquer que si $p,\, q \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout entier $n \geq q$, le nombre $n!\frac{p}{q}$ est un entier naturel.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + x^2$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans $[1, +\infty[$, notée u_n.
3. Comparer $f(u_{n+1})$ et $f(u_n)$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. On suppose que la suite $(u_n)_n$ converge vers l. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(u_n) + u_n^2)$.
   En déduire une contradiction et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\, dt$.

1. En utilisant l'identitée $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\, dt.$$
2. Déduire que f vérifie l'équation différentielle : $y'' + y = g(x) \qquad (E)$.
3. Résoudre (E).

Exercice 4

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x - 1}{x}) - \frac{1}{2}.$$
2. Montrer que f est impaire sur son domaine.
3. Sachant que, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, où $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction F_n sur $[0, +\infty[$ par
$$F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

1. Calculer $F_0(x)$ et $\lim_{x\to\infty} F_0(x)$.
2. A l'aide d'une intégration par partie, trouver une relation entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
3. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \lim_{x\to\infty} F_n(x)$
   (a) En se reférant à la question (2), montrer que
   $$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n.$$

(b) Etablir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

(c) La suite $(I_n)_n$ est-elle convergente ?Justifier votre réponse.

Exercice 6

Un questionnaire à choix multiples est composé de n questions indépendentes les unes des autres. A chaque question correspond r réponses différentes dont une seule est correcte.
Un candidat répond au hasard à chaque question. On désigne par C_i l'événement " la réponse du candidat à la question numéro i est correcte". pour $i = 1, 2, ..., n$ et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat à l'ensemble de n questions.

1. Déterminer $P(C_i)$.
2. (a) Exprimer l'événement $(X = n)$ en terme des C_i et déduire $P[X = n]$.
   (b) Exprimer l'événement $(X = 0)$ en terme des C_i et déduire $P[X = 0]$.
3. Quelle est la loi de X. Donner l'expression de $P[X = k]$, en fonction de n, r et k pour $k = 0, 1, 2, ..., n$
4. Soit $E[X] = \Sigma_{k=0}^{n} kP(X = k)$ Montrer que : $E[X] = \frac{n}{r}$

Exercice 7

1. Montrer que : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$
2. En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
3. En utilisant la formule de Vandemonde : $C_{a+b}^m = \sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$, montrer qu'on a $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k C_{n-1}^{k-1} = nC_{2(n-1)}^{n-1}$

Exercice 8

On considère n urnes $U_1, U_2, ..., U_n$ de composition comme suit : U_1 contient $(p + 1)$ boules bleux et une seule boule rouge. les autres sont de composition identique contenant chacune p boules bleux et une rouge. On tire une boule, au hasard, de l'urne U_1 qu'on ajoute à U_2, puis une boule de

U_2 ainsi modifiée, qu'on ajoute à U_3 et ainsi de suite... on tire une boule de U_{n-1} qu'on ajoute à U_n.
On désigne par R_k l'événement : " La boule tirée de l'urne U_k est rouge".

1. Calculer $P(R_1)$.
2. Montrer qu'on a : $P(R_2) = \dfrac{1}{p+2}P(R_1) + \dfrac{1}{p+2}$
3. En déduire qu'on a : $P(R_k) = \dfrac{1}{p+2}P(R_{k-1}) + \dfrac{1}{p+2}\quad 2 \leq k \leq n$.
4. On pose $v_k = P(R_k) - \dfrac{1}{p+1}$; $2 \leq k \leq n$
   (a) Montrer que la suite (v_k) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   (b) Donner l'expression de v_k en terme de k.
   (c) En déduire la valeur de $P(R_k)$.

Exercice 9

Soit E et F deux ensembles finis. On pose $\mathrm{Card}(E) = n$ et $\mathrm{Card}(F) = p$.

1. Montrer que le nombre d'applications de E dans F est égale à p^n.
2. Pour $B \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on désigne par χ_B la fonction caractéristique (indicatrice) de B définie par :

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B, \\ 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

   Soit G l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$, on définit l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & G \\ B & \longrightarrow & \chi_B \end{array}$$

   Montrer que Φ est bijective.
3. Déduire que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathrm{E})) = 2^n$.

Exercice 10

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $c \geq 0$ et S le sous ensemble de $\mathbb{C}$ donné par :

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| - |z+a| = 2c\}.$$

A. 1) Montrer l'inégalité classique $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ et déduire que si $z \in S$ alors $|2a| \geq 2c$.

2) Déterminer l'ensemble S lorsque $c > |a|$.

3) On suppose $c = 0$, décrire géométriquement l'ensemble S.

B. On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que : $z \in S \Leftrightarrow c|z+a| = -aRe(z) - c^2$, où $Re(z)$ désigne la partie réelle de z.

2) Montrer que si $c = a > 0$, alors l'ensemble S est réduit à un intervalle que l'on déterminera.

3) On suppose que $0 < c < a$.

a) Montrer que l'ensemble S est la conique d'équation

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

où x et y appartiennent à $\mathbb{R}$ avec $z = x + iy$.

b) Donner la nature de cette conique, préciser ses foyers et dessiner la.

بيروت، في ٢٠١٥/٨/١

اللجنة الفاحصة

الجمهورية اللبنانية

مجلس الخدمة المدنية

اللجنة الفاحصة

مباراة مفتوحة لقبول طلاب في شهادة الكفاءة في كلية التربية في الجامعة اللبنانية للتعيين بوظيفة استاذ تعليم ثانوي/ اختصاص(الرياضيات- الفيزياء- العلوم الاقتصادية) في ملاك وزارة التربية والتعليم العالي.

اختصاص الرياضيات / انكليزي

Exercise 1

For each $n \in \mathbb{N}$, put

$$I_n = \int_0^1 x^n \, e^{(1-x)} \, dx.$$

1. (a) Show that, for each $n \in \mathbb{N}$, we have $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.
   (b) Show that, the sequence $(I_n)_n$ is strictly decreasing and converges to 0.
   (c) Show that
   $$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
2. Consider the sequence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, defined by $u_n = n!e - I_n$.
   (a) Find a relation between u_{n+1} and u_n.
   (b) Calculate u_1.
   (c) Deduce that for each $n \in \mathbb{N}$, u_n is a natural integer.
3. (a) Using the previous parts, show that, for each $n \in \mathbb{N}$, the real number $(n!e)$ is not a natural integer.
   (b) Deduce that the real number e is not a rational number. (Hint : notice that if p, $q \in \mathbb{N}^*$, then for each integer $n \geq q$, the number $n!\frac{p}{q}$ is a natural integer.)

Exercise 2

Let f be the function defined on $[1, \infty[$ by $f(x) = \ln x + x^2$

1. Show that f has an inverse function f^{-1}, whose domain of definition is to be determined.
2. Show that, for each $n \in \mathbb{N}$, the equation $f(x) = n$ has a unique solution in $[1, \infty[$, denoted by u_n.
3. Compare $f(u_{n+1})$ and $f(u_n)$. Deduce that the sequence $(u_n)_n$ is increasing.
4. Suppose that the sequence $(u_n)_n$ converges to l. Determine $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(u_n) + u_n^2)$. Deduce a contradiction and determine $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercise 3

Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Define the function f on $\mathbb{R}$ by $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\, dt$.

1. Using the identity $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$, show that f is differentiable on $\mathbb{R}$ with

$$f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\, dt.$$

2. Deduce that f satisfies the differential equation : $y''+y = g(x) \qquad (E)$.
3. Solve (E).

Exercise 4

1. Determine the domain of definition of the function

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x-1}{x}) - \frac{1}{2}.$$

2. Show that f is odd.
3. Given that, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, where $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, show that f can be extended by continuity at 0.

Exercise 5

For each $n \in \mathbb{N}$, define the function F_n on $[0, \infty[$ by

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

1. Calculate $F_0(x)$ and $\lim_{x\to\infty} F_0(x)$.
2. Using an integration by parts, find a relation between $F_{n+1}(x)$ and $F_n(x)$.
3. Consider the sequence $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by $I_n = \lim_{x\to\infty} F_n(x)$
   (a) Referring to question (2), show that

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)} I_n.$$

(b) Establish by induction on $n \in \mathbb{N}$ that

$$I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

(c) Is the sequence $(I_n)_n$ convergent ? Justify your answer.

Exercise 6

A multiple choice questionnaire is composed of n independent questions. Each question has r different answers, one exactly of which is correct.
A candidate answers randomly each question.
Let C_i be the event : The candidate answers correctly the ith question for $i = 1, 2 \dots n$. Let X be the random variable equal to the number of correct answers given by the candidate to the set of the n questions.

1. Determine $P(C_i)$.
2. (a) Express the event $(X = n)$ in terms of the C_i 's and deduce $P[X = n]$.
   (b) Express the event $(X = 0)$ in terms of the C_i 's and deduce $P[X = 0]$.
3. What is the probability distribution of X. Give the expression of $P[X = k]$, in terms of n, r and k for $k = 0, 1, 2, \dots, n$
4. Let $E[X] = \Sigma_{k=0}^{n} kP(X = k)$ prove that : $E[X] = \dfrac{n}{r}$

Exercise 7

1. Show that : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ for $1 \leq k \leq n$
2. Deduce that : $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
3. Use the Vandemonde formula : $C_{a+b}^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}$, to show that $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k C_{n-1}^{k-1} = nC_{2(n-1)}^{n-1}$

Exercise 8

We consider n urns $U_1, U_2, \dots, U_n$ with the following composition : U_1 contains $(p+1)$ blue balls and one red. The others have the same composition with p blue balls and one red.
One ball is drawn randomly from the urn U_1 and added to U_2, then one ball is drawn from U_2 so modified and added to U_3 and so on... one ball is drawn from U_{n-1} and added to U_n.
Let R_k designate the event : the selected ball from urn U_k is red.

1. Calculate $P(R_1)$.
2. Show that : $P(R_2) = \frac{1}{p+2}P(R_1) + \frac{1}{p+2}$
3. Prove that : $P(R_k) = \frac{1}{p+2}P(R_{k-1}) + \frac{1}{p+2}$; $2 \leq k \leq n$.
4. We set $v_k = P(R_k) - \frac{1}{p+1}$; $2 \leq k \leq n$.
   (a) Show that the sequence (v_k) is a geometric sequence and determine its ratio.
   (b) Give the expression of v_k in terms of k.
   (c) Deduce the expression of $P(R_k)$.

Exercise 9

Let E and F be two finite sets. Set $\text{Card}(E) = n$ and $\text{Card}(F) = p$.

1. Show that the number of applications from E into F equals to p^n.
2. For $B \in \mathcal{P}(\text{E})$, we designate by χ_B the characteristic (indicator) function of B defined by :

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B, \\ 0 & \text{if } x \notin B. \end{cases}$$

   Let G the set of mappings from E into $\{0, 1\}$, we define the mapping :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{P}(\text{E}) & \longrightarrow & G \\ B & \longrightarrow & \chi_B \end{array}$$

   Show that Φ is bijective.
3. Deduce that card($\mathcal{P}$(E))$= 2^n$.

Exercise 10

Let $a \in \mathbb{C}^*$, $c \geq 0$ and S the subset of $\mathbb{C}$ given by :

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| - |z + a| = 2c\}.$$

A. 1) Show the classical inequality $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|\ \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ and deduce that if $z \in S$, then $|2a| \geq 2c$.
   2) Determine the set S when $c > |a|$.
   3) We suppose $c = 0$, describes geometrically the set S.

B. We suppose in this part that $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$.

1) Show that : $z \in S \Leftrightarrow c|z+a| = -aRe(z) - c^2$, where $Re(z)$ designates the real part of z.

2) Show that if $c = a > 0$, then the set S is reduced to an interval which will be determined.

3) We suppose that $0 < c < a$.

   a) Show that the set S is the conic of equation :

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

   where x and $y \in \mathbb{R}$ and $z = x + iy$.

   b) Give the nature of this conic, specify its focii and draw its graph.

بيروت، في ٢٠١٥/٨/١

اللجنة الفاحصة